# 領域分割に基づく非線形制約を用いたメッシュ変形の高速化
# Rapid Mesh Deformation with Non-linear Constraints Using Segmentation

土場　健太郎† 　増田　宏†
Kentaro DOBA† 　Hiroshi MASUDA†

†東京大学 　†The University of Tokyo

## 1. はじめに

近年，情報処理技術の発展により高精細な3次元モデルが利用されるようになり，頂点数の大きなモデルを高速に変形させる手法の需要は高まっている．典型的な変形手法として，Sorkine ら[1]が提案した曲面の微分量に関する線形の制約式を用いた変形手法があるが，変形の品質を向上させるには体積など非線形の制約も必要である．しかしながら，非線形の制約を含む変形は多くの計算時間がかかるという欠点がある．

非線形の制約を満たしつつ高速な変形を実現するには，変数を少なくする必要がある．変数の削減には格子を用いる方法(図1)とスケルトンを用いる方法があるが，スケルトンは適用できる対象が関節をもつモデルに限られる．ここでは，より汎用性の高い，格子を用いる方法を考える．

Huang ら[2]は，メッシュモデルを格子で囲み，平均値座標[3,4]を用いてメッシュの頂点座標を格子頂点座標の線形和で置き換え，変数の個数を減らして制約解法を行う手法を提案した．


図1. 格子による変数の置き換えによる変形([2]より引用)

しかし，変数を格子の座標に置き換えると，計算の過程で密な線形システムを解く必要が生じ，計算コストは格子頂点数の3乗に比例する．そのため，格子頂点数を多くするとインタラクティブな速度での変形が困難になり，一方で，少ない格子頂点数では変形で歪みが生じて品質が劣化する．

すなわち，従来手法には，インタラクティブ性と変形品質がトレードオフの関係にあった．この問題を解決するために，本稿では，複数の格子を導入して，計算の高速化と変形品質の向上を同時に実現する手法を提案する．

## 2. 提案手法

本章では，非線形制約を含むメッシュ変形を高速かつ高品質に行うための新しい手法を提案し，本手法を用いることによる利点について述べる．

### 2. 1. 変形制約の定式化

メッシュモデルの詳細形状は，離散平均曲率と少なくとも一つの固定頂点によって記述でき，これらを保存する制約式は $\mathbf{x}$ を頂点座標とする線形システム $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ で記述できる[1]．ここでは，変形の品質を向上させるため，これに加えてメッシュの体積を保存する制約 $g(\mathbf{x})$ を導入し，以下のような制約つき最適化問題の解 $\mathbf{x}$ を求めることによって変形を実現する．

$$\min \|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|^2 \text{ subject to } g(\mathbf{x})=0 \tag{1}$$

この最適化問題は，非線形制約を持つために Newton 法などを用いた繰り返し計算を必要とする．また，ここで体積保存制約を厳密制約としたのは，最適化問題における線形の項と非線形の項を分離しておくことで，繰り返し計算の各ステップにおける線形システムを高速に解くためである．

### 2. 2. 提案手法の概要

本研究では，単一の格子ではなく，オーバーラップする複数の格子によってメッシュモデルを囲むことで，従来手法よりも高速かつ高品質なメッシュ変形を実現する．図2は，3個の格子によって囲まれたメッシュを示している．ここでは，領域分割の仕方をユーザが指定し，選択領域のメッシュにポリゴン簡略化を施した後でスケーリングを行うことで格子を生成している．

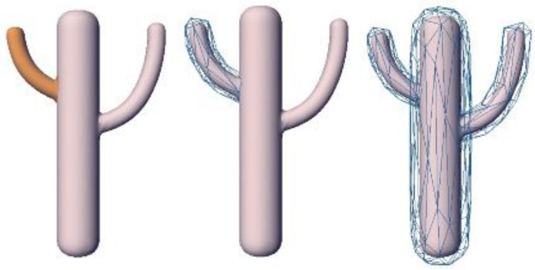


図2. ユーザの選択によるメッシュ領域分割

次に，例えば図3のように，メッシュが A,B,C の3領域に分割された場合，平均値座標[3,4]を用いて，領域 A に含まれる頂点の座標 $\mathbf{x}_{i(A)}$ を次式で表現し，式(1)の変数を格子 A の頂点座標 $\mathbf{p}_{j(A)}$ で置き換える(図3a)．領域 B,C についても同様に置き換える．

$$\mathbf{x}_{i(A)}=\sum_j w_{ij(A)}\mathbf{p}_{j(A)} \tag{2}$$

このとき，領域をオーバーラップが生じるように設定しているので，オーバーラップ領域に含まれる頂点(図3b)では，複数の置き換え表現を持つ．本手法では，これらの表現をブレンドすることによって，領域間を滑らかに連動できるようにする．たとえば，頂点が領域A, B の両方に含まれるとき，0から1までの値を取る係数$\alpha$を用いて，以下のような置き換えを行う．

$$\mathbf{x}_{i(A,B)} = \alpha \sum_j w_{ij(A)} \mathbf{p}_{j(A)} + (1-\alpha) \sum_j w_{ij(B)} \mathbf{p}_{j(B)} \quad (3)$$

ここで，$\alpha$は図3c のように頂点からそれぞれの領域の格子までの最短距離$d_A, d_B$を用いて，以下のように定義する．

$$\alpha = d_A / (d_A + d_B) \quad (4)$$

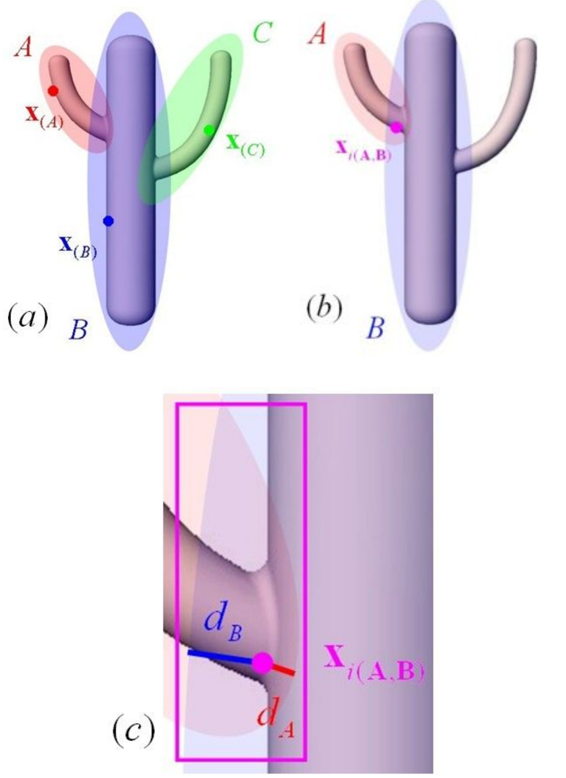



図３．分割した領域における変数の置き換え

### 2. 3. 提案手法の利点

本手法の利点は，領域分割を用いたことによる計算量の削減と，変形における歪みの軽減である．Huang ら[2]の手法では，最適化計算において 0 成分のない密な行列を解かなければならないが，本手法で示すように領域分割をすることにより，行列が疎になり計算コストを削減することが可能となる(詳細については3章で示す)．さらに，式(2), (3)で表されるように，メッシュの頂点座標を領域分割された近くの格子座標で置き換えるため，離れた位置にある格子頂点が動くことによる意図しない変形を抑制することができる．

## 3. 制約式の詳細

本研究では，メッシュモデルの各頂点の座標$\mathbf{x}_i$に対し線形および非線形の制約式を立て，それらを満たす最適解を算出することでメッシュの変形を実現する．以下にその制約式と計算のためのアプローチを示す．

### 3. 1. 線形制約

メッシュの変形においては，変形の際にメッシュの詳細形状を保存する方法として，離散平均曲率を用いる方法がSorkine ら[1]により提案された．離散平均曲率$\delta_i$は近似的に各頂点における平均曲率法線$\kappa_i \mathbf{n}_i$ (図4a)を表し，この$\delta_i$の値を保存する制約式を設けることによって，メッシュの各頂点における局所的な凹凸を保存したまま変形を実現する．

$$\kappa_i \mathbf{n}_i = \frac{1}{4A_i} \sum_{j \in N(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \delta_i \quad (5)$$

この式は Meyer ら[7]によって提案されたものであり，$\kappa_i$は平均曲率，$\mathbf{n}_i$は法線ベクトル，$A_i$はボロノイ面積，$N(i)$は頂点$\mathbf{p}_i$に連結する頂点の添字集合を表す．ここでボロノイ面積とは図4b に色分けしたように，各頂点の勢力範囲の面積である．また$\alpha_{ij}$と$\beta_{ij}$は図4c に示したようにエッジ$(i, j)$に隣接する二つの三角形の頂点角である．

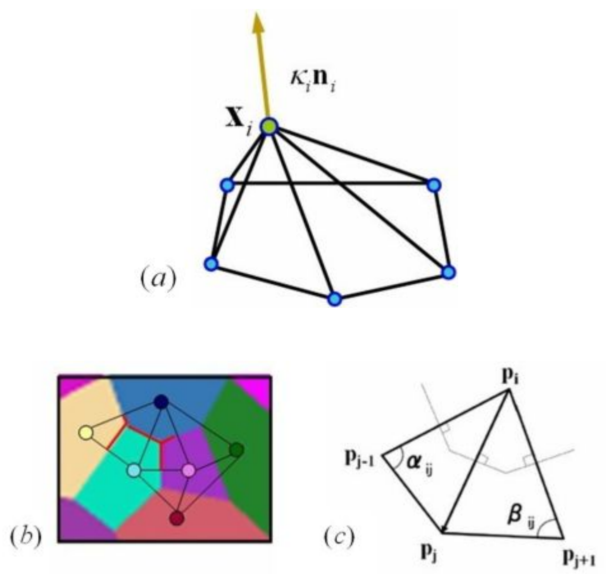



図４．変形における平均曲率の保存

さらに，変形前後において座標が固定される点およびマウスに追従して変化する点(ハンドル点)を設定し，それぞれを以下のような制約式で表す．

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{u}_{iFIXED} \quad (6)$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{u}_{iHANDLE} \quad (7)$$

これらはいずれもメッシュの頂点$\mathbf{x}_i$に関する線形の制約式として表されるため，1 つの線形システム$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$にまとめることができる．

この線形システムは，各頂点の平均曲率に関する制約式に加えて固定点，ハンドル点の制約式を持つため，制約式の個数が未知変数の個数を上回り，厳密な解を得ることができな

い. したがって, 全制約の誤差の二乗和を最小化する最適化問題$\min \|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|^2$を解くことで変形後の座標を算出する.

本手法ではこれに加えて非線形の制約（体積保存制約）を設定し, 式(1)で表される最適化問題を解く.

### 3. 2. 非線形制約

本研究では, メッシュの変形品質を向上させるため, 前節で述べた線形制約に加えて非線形である体積保存制約を導入する. メッシュの体積$V(\mathbf{x})$は, メッシュ上の三角形$T_{i,j,k}$と原点からなる四面体の符号付き体積の総和により式(8)で表される. この$V(\mathbf{x})$について, 体積の初期値$\tilde{V}$からの変化量$g(\mathbf{x})$を式(9)のように定める. なお, メッシュの体積を算出するためには, そのメッシュが閉じた二多様体であることが必要であり, 以降はすべてこの条件を満たすメッシュモデルを扱うものとする.

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{T_{i,j,k}} \frac{1}{6}(\mathbf{x}_i \times \mathbf{x}_j)\cdot(\mathbf{x}_k) \tag{8}$$

$$g(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) - \tilde{V} \tag{9}$$

体積が変化しないとすると, 式(9)より$g(\mathbf{x})=0$となるため, 曲面の凹凸および体積を保存した変形は, 式(1)のような制約つき最適化問題に帰着できる.

### 3. 3. 繰り返し計算

本手法では, 式(1)で表される非線形制約を含んだ最適化問題を, Gauss-Newton 法を用いた反復計算[5]によって解く. 今, 関数$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}$を定義し, 反復計算の各ステップにおいて, メッシュ頂点の微小な座標変化$\mathbf{h}$についてこの関数を以下のように線形近似する.

$$f(\mathbf{x}) \approx l(\mathbf{h}) \equiv f(\mathbf{x}) + (\mathbf{A} - \mathbf{J}_b(\mathbf{x}))\mathbf{h} \tag{10}$$

ここで, $\mathbf{J}_b(\mathbf{x})$は$\mathbf{b}$のヤコビアンである. この近似によって, 式(1)の計算は以下のような線形最適化問題の解$\mathbf{h}$を繰り返し求めることに帰着できる.

$$\min \| l(\mathbf{h}) \|^2 \quad \text{subject to } g(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = 0 \tag{11}$$

さらに, $f$と同様に$g$についても式(12)のような線形近似を行うことで, ラグランジェの未定乗数法[6]により, 式(11)の解$\mathbf{h}$は未定乗数$\lambda$を用いて式(13)のように求めることができる.

$$g(\mathbf{x}+\mathbf{h}) \approx g(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_g(\mathbf{x})\mathbf{h} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= -(\mathbf{J}_f^T\mathbf{J}_f)^{-1}(\mathbf{J}_f^T f + \mathbf{J}_g^T \lambda) \\ \lambda &= -\{\mathbf{J}_g(\mathbf{J}_f^T\mathbf{J}_f)^{-1}\mathbf{J}_g^T\}^{-1}\{g - \mathbf{J}_g(\mathbf{J}_f^T\mathbf{J}_f)^{-1}\mathbf{J}_f^T f\} \end{aligned} \tag{13}$$

ただし, $\mathbf{J}_f = \mathbf{A} - \mathbf{J}_b(\mathbf{x})$, $\mathbf{J}_g$は$g$のヤコビアンである. 式(13)により$\mathbf{h}$を求める際, $\mathbf{J}_f$及びその逆行列を求めるのは大きな計算コストになる. ここで, $b$のヤコビアン$\mathbf{J}_b(\mathbf{x})$について$\|\mathbf{J}_b(\mathbf{x})\| \ll \|\mathbf{A}\|$であるため, $\mathbf{J}_f \cong \mathbf{A}$のような近似を用いても$\mathbf{x}$は同じ解へ収束することが知られている. これを利用すると, 式(13)は近似を用いて以下のように書き直すことができ, 計算時間を大幅に短縮することができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= -(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T f + \mathbf{J}_g^T \lambda) \\ \lambda &= -\{\mathbf{J}_g(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{J}_g^T\}^{-1}\{g - \mathbf{J}_g(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T f\} \end{aligned} \tag{14}$$

$k$回目のステップで式(14)により求められる$\mathbf{h}_k$を用いて, $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \varepsilon\mathbf{h}_k$のように線形探索（$\varepsilon$は定数）によって$\mathbf{x}$を更新することで, 収束により最適解を得る.

### 3. 4. 平均値座標

本研究では, 非線形最適化計算のコストを削減するため, 平均値座標[3,4]による変数の置き換えを行っている. 平均値座標は, メッシュの頂点$\mathbf{x}_i$を格子座標$\mathbf{p}_j$および重み係数$w_{ij}$による線形和$\mathbf{x}_i = \sum_j w_{ij}\mathbf{p}_j$で表す手法である. この重みは定数であり, $w_{ij}$を成分に持つ行列$\mathbf{W}$を用いると, メッシュ頂点の変数の置き換えは以下のような行列表現にまとめることができる.

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}\mathbf{p} \tag{15}$$

ここでは格子の頂点数を数百程度に設定しているため, 数千あるいは数万の頂点を持つメッシュに対する最適化問題を解く場合に比べて計算時間を大幅に短くすることができる. Huang ら[2]はこの手法を用いて非線形制約を含むメッシュ変形手法を提案したが, 単一格子を用いたことで1章に述べたような格子頂点数に関するトレードオフが生じる. 本研究では, メッシュの分割した領域それぞれに対し個別に式(2)の置き換えを用いることで, このトレードオフに対するひとつの解法を与える.

線形和$\mathbf{x}_i = \sum_j w_{ij}\mathbf{p}_j$における係数$w_{ij}$は変形前に計算され, 定数として扱われる. この係数は, 元となるメッシュの頂点をよく近似するために近いところには強い重みを, 遠いところには弱い重みを割り振る必要がある. また, メッシュの各頂点に対してスケーリングが起こらないように, 与える係数$w_{ij}$は以下の条件を満たさなければならない.

$$\sum_{j=1}^{N_p} w_{ij} = 1 \tag{16}$$

ここで, メッシュの頂点$\mathbf{x}_i$を中心とする単位球面上に格子$S$を投影した図形$\tilde{S}$を考える. 閉じたメッシュモデルの投影は, 単位球を被覆するので, 法線の和は0となる. したがって, 格子上の点を$\mathbf{p}$とすると,

$$\int_{\tilde{S}} \frac{\mathbf{p}-\mathbf{x}_i}{|\mathbf{p}-\mathbf{x}_i|} d\tilde{S} = 0 \qquad (17)$$

この式を変形すると，格子 $S$ を構成する三角形を $T_i$，その投影を $\overline{T_i}$ と置いて，以下のようになる．

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= \int_{\tilde{S}} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}-\mathbf{x}_i|} d\tilde{S} \Big/ \int_{\tilde{S}} \frac{1}{|\mathbf{p}-\mathbf{x}_i|} d\tilde{S} \\ &= \left( \sum_j \int_{\tilde{T}_j} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{p}-\mathbf{x}_i|} d\tilde{T}_i \right) \Big/ \int_{\tilde{S}} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|} d\tilde{S} \end{aligned} \qquad (18)$$

メッシュ $S$ を構成する三角形 $T_i$ 上の点 $\mathbf{p}$ は，三角形 $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k)$ の頂点座標の線形和として，

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{p}_i + \beta \mathbf{p}_j + \gamma \mathbf{p}_k \qquad (19)$$

とかける．この関係式を式(18)に代入して整理することで平均値座標が計算される．

### 3. 4. 領域分割による計算の高速化

本手法の利点は，領域分割を用いたことによる計算量の削減と，変形における歪みの軽減である．

式(15)に述べた平均値座標による変数の置き換えを用いて，式(1)は以下のように書きなおすことができる．

$$\min \| \mathbf{AWp} - \mathbf{b} \|^2 \ \text{subject to} \ g(\mathbf{Wp}) = 0 \qquad (20)$$

これは格子の頂点 $\mathbf{p}$ を求める最適化問題であり，繰り返し計算の各ステップはラグランジェの未定乗数法を用いて以下のような $\mathbf{h}_\mathbf{p}, \lambda_\mathbf{p}$ を求める計算になる．

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_\mathbf{p} &= -(\mathbf{W}^T \mathbf{A}^T \mathbf{AW})^{-1} (\mathbf{W}^T \mathbf{A}^T f + \mathbf{W}^T \mathbf{J}_g^T \lambda) \\ \lambda_\mathbf{p} &= -\{ \mathbf{J}_g \mathbf{W} (\mathbf{W}^T \mathbf{A}^T \mathbf{AW})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{J}_g^T \}^{-1} \\ &\qquad \{ g - \mathbf{J}_g \mathbf{W} (\mathbf{W}^T \mathbf{A}^T \mathbf{AW})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}^T f \} \end{aligned} \qquad \cdot\cdot(21)$$

Huang らは単一の格子を用いたので，行列 $\mathbf{W}$ が 0 成分をまったく持たない密な行列になり，計算量が多くなってしまう．本手法では領域分割を行うことにより，$\mathbf{W}$ の代わりに領域ごとに変数のグルーピングがなされた新たな係数行列 $\tilde{\mathbf{W}}$ を生成する．この $\tilde{\mathbf{W}}$ は図6のように，メッシュ上の頂点 $\mathbf{x}_i$ に対して自身が含まれる領域の格子からのみ係数が割り当てられる．それにより $\tilde{\mathbf{W}}$ は 0 成分を多く持つ疎行列になり，あらかじめ式(13)における行列 $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{W}}$ にコレスキー分解を施しておくことで，繰り返し計算を高速に行うことが可能となる．

## 4. 実験と評価

図7は，体積制約を用いた場合と用いない場合の比較を示している．体積制約を導入することによって，自然な変形ができている．この変形では，グレイの部分を固定し，赤の部分をユーザがインタラクティブに移動させている．また，他の例(恐竜のモデル)による変形結果を図8に示す．表1は，単一格子を用いた従来手法と領域を3分割した本手法を比較したものである．このサボテンモデルは，5430 頂点である．トータルの格子頂点数はどちらも同じになるようにした．また，表 1 は Gauss-Newton 法で計算したときの各ステップの計算時間と体積変化を示している．この結果からわかるように，領域分割によって計算時間は大幅に向上する．変形結果を図8に示す．単一格子を用いた場合には歪みが生じているが，本手法では良好な結果が得られている．これは，単一格子では各頂点が離れた格子頂点からの影響も受け，形状が歪み易くなるためである．ここでいう歪みとは，メッシュモデルの形状が変形前に対し一部だけ大きく変化する(出っ張る，へこむ)ことであり，変形の品質を向上させていく上で歪みはなるべく生じないことが望ましい．本手法では，領域分割された近くの格子頂点の影響を強く受けるため，変形品質は向上する傾向がある．

領域分割数を増加させることによって，計算効率は向上していく．表2は，サボテンモデルの領域分割数を図10のように増加させたときの計算時間を示したものである．この結果から比較的大規模なモデルでも領域分割数を増加させることにより，非線形制約を満たす変形計算を高速化させることができることがわかる．

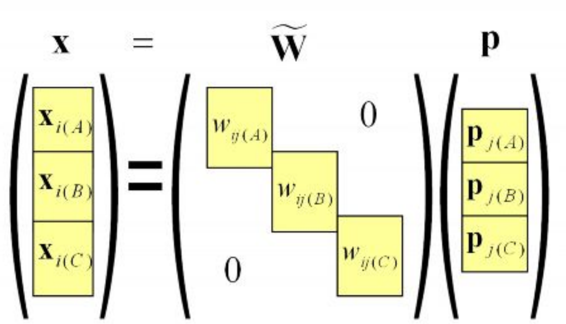



図6. 本手法における係数行列 $\tilde{\mathbf{W}}$

## 5. まとめ

本研究では，非線形制約を含むメッシュ変形を高速かつ高品質に行うための手法を提案した．本手法では，計算コストの大きな非線形最適化問題に対し，複数の格子を用いた変数の置き換えを行い，計算量を削減した．それによって，単一格子を用いた従来研究の問題であった，格子頂点数に関するインタラクティブ性と変形品質のトレードオフを解決した．

本研究では格子の個数を増加させていくことで計算速度の向上が見られたが，格子を細かくしすぎることにより，変形品質の低下が起こることも考えられる．そのため，領域をどの程度細かく分割するのが最適かについては，今後検討していく必要がある．さらに，より利便性を高めるために，格子が自動で生成されるようにすることも課題である．また，GPU を用いた実装による計算速度の向上，および高品質な変形を実現するために必要な制約を検討，導入していきたい．

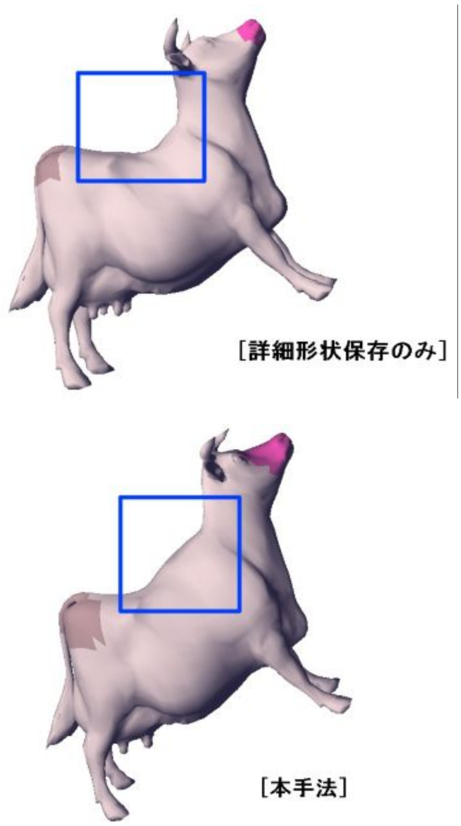



図7. 体積制約の有無による変形比較

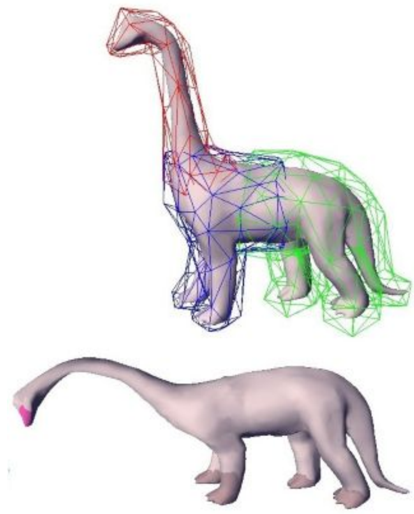


図8. 他のモデルの変形例

表1. 領域の分割数による計算時間の比較

| 変形手法 | 単一格子 | 本手法<br>(3 分割) |
|---|---|---|
| 粗い格子頂点数(個) | 155 | 155 |
| 各 Step 計算時間<br>(秒) | 0.55 | 0.2 |
| 収束回数 (回) | 4 | 4 |
| 計算時間<br>(秒／フレーム) | 0.4 | 1.3 |
| 変形後の体積 | +0.02% | +0.02% |

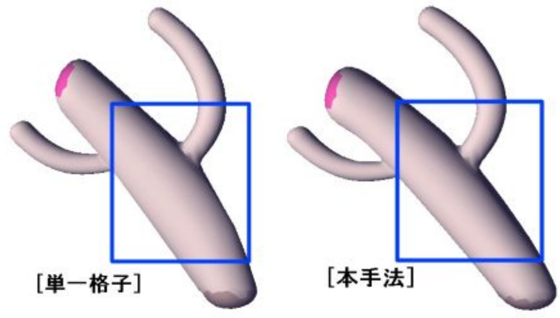



図9. 従来手法(分割なし)と本手法の変形比較

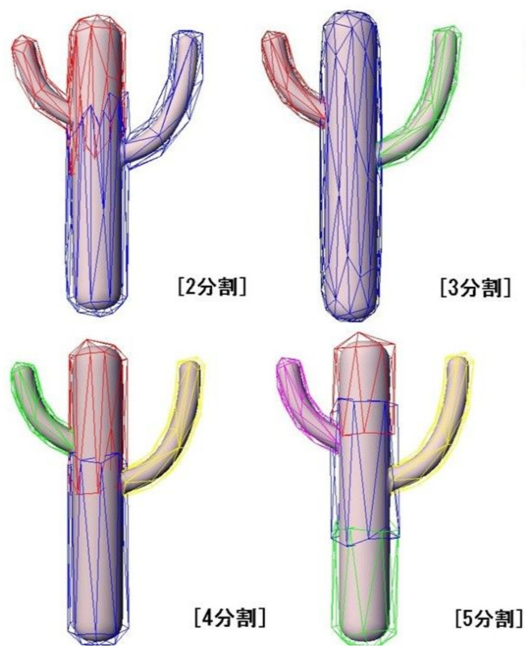
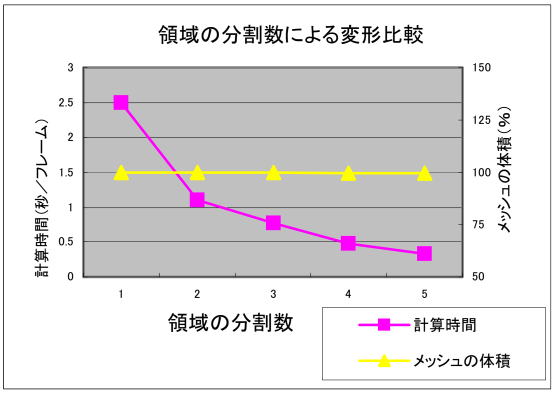



図10. 分割格子数の変更

表2. 分割数による計算速度の遷移




参考文献

1) Sorkine O. et al. "Laplacian surface editing", 2004, In SGP'04: In Proceedings of the symposium on Geometry processing, ACM Press, 175–184.

2) Huang J. et al. "Subspace gradient domain mesh deformation", 2006, ACM Trans. Graph. 25, 3, 1126-1134.

3) Ju, T. et al. "Mean value coordinates for closed triangular meshes", 2005, ACM Trans. Graph. 24, 3, 561-566.
4) Floater, M. S., Kos, G., and Reimers, M. 2005. Mean value coordinates in 3d. CAGD 22, 623-631.
5) Steihaug, T. 1995. An inexact gauss-newton approach to mildly nonlinear problems. Tech. rep., Dept. of Mathematics, University of Linkoping.
6) MADSEN, K., NIELSEN, H., AND TINGLEFF, O. 2004. Optimization with constraints. Tech. rep., Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark.
7) Meyer, M., Desbrun, M., Schr¨oder, P., and Barr, A. H. 2003. Discrete differential-geometry operatorsfor triangulated 2-manifolds. In Visualization and Mathematics III, H.-C. Hege and K. Polthier, Eds. Springer-Verlag, 35–57.
8) Garland, M., and Heckbert, P.,S. Surface simplification using quadric error metrics. In SIGGRAPH '97 Proc., August 1997.
9) Lipman, Y., Sorkine, O., Cohen-Or, D., Levin, D., R¨ossl, C., and Seidel, H.-P. 2004. Differential coordinates for interactive mesh editing. *Proceedings of Shape Modeling Interational*. 181-190.
10) Hoppe, H. Progressive meshes. *SIGGRAPH '96*, 99–108.
11) Sorkine, O. 2005. Laplacian mesh processing. In *STAR Proceedings of Eurographics 2005*, Eurographics Association, Y. Chrysanthou and M. Magnor, Eds., 53-70.
12) M. Botsch et al. 2007, Adaptive space deformations based on rigid cells, EUROGRAPHICS, Volume 26.