

# 設計制約を考慮したアセンブリモデルのメッシュ変形操作\*

小川健太<sup>\*1</sup>, 増田宏<sup>\*2</sup>

## A constraint-based mesh deformation technique for assembly models

Kenta OGAWA<sup>\*3</sup> and Hiroshi MASUDA<sup>\*3</sup>

<sup>\*3</sup> School of Engineering, The University of Tokyo  
7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656 Japan

Mesh deformation, which is sometimes referred to as mesh morphing in CAE, is useful to provide various shapes of meshes to CAE tools. This paper proposes a new framework for interactively and consistently deforming assembly models of sheet structure for automobile parts. This framework is based on surface-based deformation, which calculates vertex positions so that the mean curvature normal is preserved at each vertex in a least square sense. While existing surface-based deformation techniques cannot simultaneously deform assembly mesh models, our method allows to smoothly deforming disconnected meshes by propagating rotations and translations through disconnected vertices. In addition, we extend our deformation technique so that non-manifold conditions can be handled, because shell structure models often include non-manifold edges. We applied our method to assembly mesh models of automobile parts. Our experimental results showed that our method could deform assembly models smoothly and interactively.

**Key Words :** Geometric modeling, CAD, Mesh deformation, Assembly model

### 1. 緒 言

製造業における製品開発においては、3D CAD で作成された 3D モデルをメッシュモデルに変換し、CAE 解析を行うことが一般に行われている。しかし、CAD モデルは位相と幾何の制約が強いため、意図に合った編集をするのは必ずしも容易ではなく、また、CAD モデルから解析用メッシュモデルの作成を全自動で行うのは難しい。そのため、メッシュモデルを直接編集することもしばしば行われるが、多数の部品から構成されるアセンブリモデルに対して設計制約を満たしながら編集するのは非常に面倒な作業である。

メッシュモデルの変形においては、以下を満たすことが望ましい。

- (1) 設計で用いられる様々な形状が扱えること。
- (2) 編集操作が直感的かつインタラクティブに行えること。
- (3) 寸法や形状特徴などに関する設計制約をできる限り厳密に満たすこと。

- (4) 複数の部品から構成されるアセンブリモデルが扱えること。また、部品間の間隔や接続関係などの設計要件が簡単に満たせること。

解析用のメッシュを変形するための手段として、これまでいくつかの手法が提案されてきた。

局所的な変形手法としては、円筒や平面など、比較的単純なパラメータで記述できる形状を、パラメータの操作によって変形する手法が商用システムなどに実装されている。しかしこの方法では適用できる形状が限られており、一般性に欠ける。

大域的にメッシュ変形する方法としては、ボリウムベース法がある<sup>(1)</sup>。この方法は、変形させたい領域を格子で囲み、格子を変形することで形状変形する。この方法では、どのような形状でも扱うことができ、また、複数部品が含まれていても変形はできる。しかし、周囲の格子を変形させることで間接的にメッシュ形状を変形させるために、直感性に欠け、意図した変形を行うことが難しいという問題がある。また、円筒穴などの特徴的な形状を歪めてしまい、微妙な形状制御を行うことが難しい。メッシュの頂点間に制約を設定するためには、非線形の連立方程式を解かなければならないが、この計算は、計算時間がかかる上、不安定である。また、変形の自由度は、ボリウムの格子

\*原稿受付 2007 年 00 月 00 日

<sup>\*1</sup> 非会員、東京大学大学院工学系研究科 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

<sup>\*2</sup> 正員、東京大学大学院工学系研究科。

E-mail: masuda@nakl.t.u-tokyo.ac.jp

点の頂点数で決まるため、変形の自由度も乏しい。これらの理由から、設計制約を満たす変形的手段としてボリュームベース法が利用されることはあまりない。

サーフェスベース法は、制約を満たしながらインタラクティブにメッシュ変形ができるため、近年注目されている手法である<sup>(2)(7)</sup>。この方法は、メッシュの各頂点で、離散ラプラシアンを用いて平均曲率法線に相当する量を算出し、変形の前後でそれらをできるだけ保存するように頂点座標を決める。頂点座標を変数とした線形システムを、最小二乗法によって計算するため、頂点間で定義された制約式を反映させることが容易である。Masudaらはこの性質を利用して、設計上変形させたくない形状特徴を保持する変形手法を示している<sup>(2)</sup>。サーフェスベース法は、設計制約を満たす変形を行うための手段として有望であるといえる。

しかしながら、この方法を解析用のメッシュ編集に利用しようとするとき以下のような問題が生じる。

- (1) 頂点座標が算出されるためには、平均曲率に関する制約と少なくとも一つの位置制約が必要である<sup>(4)</sup>。この条件が満たされないと、連立方程式の解が不定となり、頂点位置が決定できない。そのため、複数の非連結成分を含むメッシュにおいては、非連結成分に位置制約が伝播しないため、計算結果が得られない。
- (2) 非多様体エッジを含むメッシュでは、非多様体エッジ上で平均曲率が定義できないため、制約が不足してしまい、計算結果が得られない。しかし、解析用のメッシュでは、図1の強度補強用リブのように、簡略化された非多様体がしばしば生じる。

本論文では、シェル構造のアセンブリモデルを対象とし、設計制約を満たしながら変形する手法を提案する。設計制約には、部品間の接触、穴の間隔、接合面の形状などが含まれる。また、本手法を、実際の設計で使用された解析モデルに適用し、設計要求に合った変形が行えることを示す。

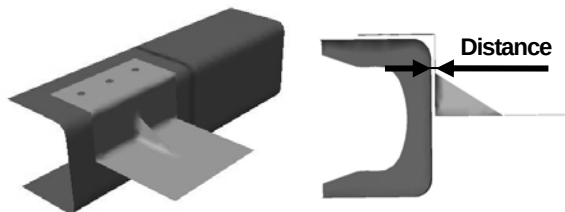


Fig 1. Shell model with an offset distance and non-manifold edges.

## 2. 特徴領域を保存するメッシュ変形

サーフェスベース法では、頂点間の制約を指定できるため、形状特徴領域の形状を保存するメッシュ変形が可能である。この手法を用いた変形例を図2に示す。この変形では、固定領域(fixed)とハンドル領域(handle)をユーザが指定し、ユーザがマウス等を用いてハンドル領域を移動させると、それに追従して、他の部分も変形する様子を示している。この際、円弧などの特徴領域に制約を与えないと、図2(b)のように円が歪んでしまう。図2(c)(d)は、円弧を保存する制約を与えて、ハンドル部を移動させた例である。

本章では、まず、形状特徴領域を保持する変形手法<sup>(2)</sup>について説明する。

### 2・1 頂点座標の制約

$\kappa_i$  を平均曲率、 $\mathbf{n}_i$  を法線ベクトル、 $A_i$  を頂点 $\mathbf{p}_i$ に関するボロノイ面積、 $N(i)$  を頂点 $\mathbf{p}_i$ の一近傍の頂点の添字集合とすると、メッシュの頂点 $\mathbf{p}_i$  ( $i \in \Lambda$ )での平均曲率法線 $\kappa_i \mathbf{n}_i$ は次式で近似することができる<sup>(8)</sup>。

$$\mathbf{L}(\mathbf{p}_i) = \frac{1}{4A_i} \sum_{j \in N(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = R_i \delta_i \quad (1)$$

ここで、 $\alpha_{ij}$ と $\beta_{ij}$ はエッジ $(i, j)$ に隣接する二つの三角形の頂点角、 $\delta_i$ は初期メッシュの平均曲率法線、 $R_i$ は法線ベクトルを回転する行列である。

位置制約は特定の頂点の座標を直接指定するために用いられ、以下の式で指定される。 $\mathbf{u}_i$ はユーザによって指定される座標、 $\Lambda_p$ は添え字集合である。

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{u}_i \quad (i \in \Lambda_p) \quad (2)$$

工学上意味を持った形状特徴 $f$ を保存する制約は、 $\tilde{\mathbf{p}}_i$ と $\tilde{\mathbf{p}}_j$ を変形前の座標、 $R_i$ を頂点 $i$ での回転行列、 $E_f$ を形状特徴領域 $f$ に含まれるエッジ集合、 $\Lambda_f$ を形状特徴の添字集合として、以下で与えられる。

$$\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j = R_i(\tilde{\mathbf{p}}_i - \tilde{\mathbf{p}}_j) \quad ((i, j) \in E_f, f \in \Lambda_f) \quad (3)$$

### 2・2 回転の制約

式(1)は平均曲率と法線の積であるが、保存したいのは平均曲率だけであり、自然な変形結果を得るためには、法線ベクトルをなんらかの手段で回転させることが必要である<sup>(3)</sup>。そこで、各頂点での回転行列 $R_i$ を考える。 $R_i$ は回転軸方向の単位ベクトル $\mathbf{m}_i$ と回転角 $\theta_i$ によって一意に決まる。ここで、 $\mathbf{m}_i$ を純四元数、 $\theta_i$ を実数とみなして、回転を四元数 $\cos(\theta_i/2) + \mathbf{m}_i \sin(\theta_i/2)$ で表現する。このとき、四元数の対数を $\mathbf{r}_i$ と置き、以下の式を各頂点に割り当てる<sup>(2)</sup>。

$$\mathbf{r}_i = \ln(\cos \frac{\theta_i}{2} + \mathbf{m}_i \sin \frac{\theta_i}{2}) = \frac{\theta_i}{2} \mathbf{m}_i \quad (4)$$

各頂点での  $\mathbf{r}_i$  は、回転量を滑らかに補間するように決める。そのために、位置制約と形状特徴制約に対応して、以下の二つの回転の制約式を設定する。  $\mathbf{c}_i$  はユーザ操作によって指定される回転量である。

$$\begin{cases} \mathbf{r}_i = \mathbf{c}_i & (i \in \Lambda_p) \\ \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = 0 & ((i, j) \in E_f, f \in \Lambda_f) \end{cases} \quad (5)$$

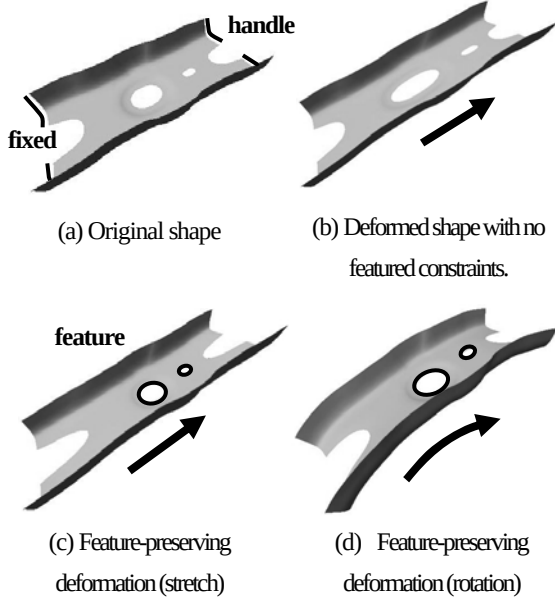


Fig 2. Feature-preserving deformation.

**2・3 頂点座標の計算** 平均曲率、位置制約、形状特徴制約の個数は、変数である頂点数よりも多くなるので、最小二乗法を用いて頂点座標を算出する。そのために、まず、以下の式(6)を解いて各頂点での回転行列  $R_i$  を算出した後、式(7)に  $R_i$  を代入して頂点座標を計算する。

$$\sum_{i \in \Lambda} \|\mathbf{L}(\mathbf{r}_i)\|^2 + w \sum_{j \in \Lambda_p} \|\mathbf{r}_j - \mathbf{c}_j\|^2 + w \sum_{f \in \Lambda_f} \sum_{(i,j) \in E_f} \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^2 \rightarrow \min \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \Lambda} \|\mathbf{L}(\mathbf{p}_i) - R_i \delta_i\|^2 + w \sum_{j \in \Lambda_p} \|\mathbf{p}_j - \mathbf{u}_j\|^2 \\ & + w \sum_{f \in \Lambda_f} \sum_{(i,j) \in E_f} \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j - R_i(\tilde{\mathbf{p}}_i - \tilde{\mathbf{p}}_j)\|^2 \rightarrow \min \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $w$  は重みであり、平均曲率の大きさに比べて相対的に大きい値が指定される。

式(6)(7) は、それぞれ線形システム  $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  を解く問題に帰着できる。行列  $\mathbf{M}$  は疎な正定値対称行列なので、前処理としてコレスキー分解を施しておけば、式(2)(5)における異なる  $\mathbf{u}_i$ 、 $\mathbf{c}_i$  に対して、インタラクティブな速度で座標値の計算が可能である<sup>9)</sup>。

### 3. アセンブリモデルのメッシュ変形手法

サーフェスペース法は、設計制約の組み込みが容易であるが、非連結なメッシュに変形を伝播させることができない。そこで、アセンブリモデルの変形を行うために、非連結な部品間で制約を伝播させる仕組みを導入する。この制約伝播では、非連結なメッシュの頂点間に仮想リンクを設定し、変形後も相対的な頂点位置と法線ベクトルの相対角度を保存することで、制約を満たした変形を実現する。つまり、各部品内部の頂点に関して平均曲率の連続性を保ち、各部品間で仮想リンクが設定された場合は、この仮想リンクが設定された頂点の平均曲率の変化量が伝播することを示す。また、非多様体モデルを取り扱うための制約を導入した変形方法についても示す。

#### 3・1 非連結頂点間の制約

非連結なメッシュ間に制約を伝播させるために、非連結成分の頂点間に制約を設定する。図3のように、Mesh1に属する頂点を  $\mathbf{p}_i^{(1)}$ 、Mesh2に属する頂点を  $\mathbf{p}_j^{(2)}$  とするとき、頂点  $\mathbf{p}_i^{(1)}$  と  $\mathbf{p}_j^{(2)}$  の間の制約を以下のように指定する。ここで、 $\gamma_{i,j}$  は初期状態での  $(\mathbf{p}_i^{(1)} - \mathbf{p}_j^{(2)})$  の値、 $\mathbf{r}_i^{(1)}$  と  $\mathbf{r}_j^{(2)}$  はそれぞれMesh 1 と Mesh2に属する頂点での四元数の対数の値である。

$$\begin{cases} g_k : (\mathbf{p}_i^{(1)} - \mathbf{p}_j^{(2)}) - R_i^{(1)} \gamma_{i,j} = 0 \\ h_k : \mathbf{r}_i^{(1)} - \mathbf{r}_j^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

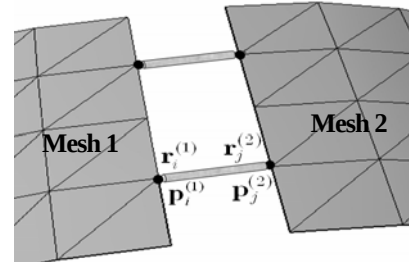
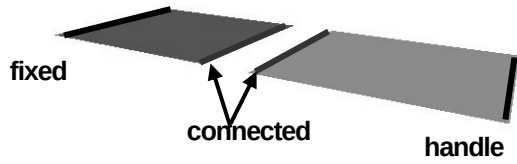


Fig 3. Pair of vertices to be connected.

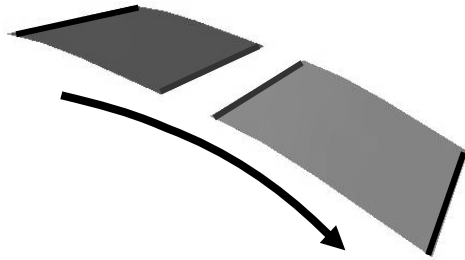
$g_k$  は頂点の相対的な位置関係を保存する制約であり、 $h_k$  は2頂点における法線の角度を保存する制約である。これらの制約式は二乗した後、式(6)(7)で用いた重み  $w$  を乗じて、式(6)(7)の目的関数に追加する。この最小化は最小二乗法を用いて行われるので、線形システム  $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  は  $\mathbf{M}^T \mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{M}^T \mathbf{b}$  に変形され、その結果、実質的に二近傍までの頂点の関係式が解かれることになる。そのため、非連結頂点間に滑らかさに関する制約を陽に指定していなくても、非連結頂点間付

近で顕著な折れ曲がりが生じることはなく、変形が滑らかに伝播する。

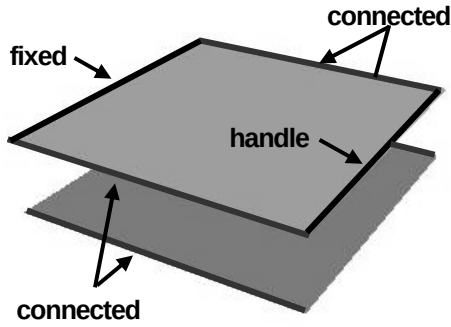
図4は、二つの平板を用いて非連結成分間に制約を導入した変形の例を示す。図4(a)は、二つの平板を横に並べ、その間に仮想リンクが設定されている。この結果、図4(b)のように二つの平板の相対距離を保ち滑らかに変形していることが確認できる。また、図4(c)では、二つの平板を上下に並べ、図のように仮想リン



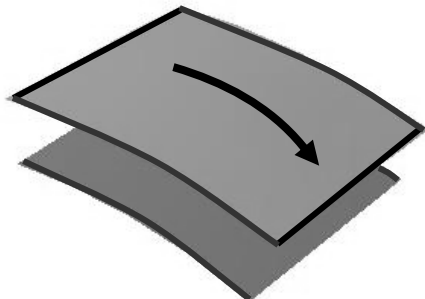
(a) Pair of boundaries is connected.



(b) Deformed shapes.



(c) Two pairs of boundaries are connected.



(d) Deformed shape.

Fig 4. Deformation of disconnected planes.

クが設定されている。この結果、図4(d)のように離れた二つの平板が同じように変形しているのが確認できる。

本手法では、頂点ペアの指定を簡単化するため、頂点ペアを作成したい領域をユーザが画面上で指定し、その領域内で最近傍となる頂点ペアを自動的に計算することで、制約を指定する方法を用いている。

図5は、16個の部品で構成されており隣接する非連結成分間で、最近傍頂点のペアに式(8)に示す制約式が自動的に指定されている。ここでの変形は、左端の連結成分の端点を固定して、右端の連結成分の端点をハンドル頂点として移動させている。この例では、非連結成分間で4個の仮想リンクが設定されている。そして、この仮想リンク周りでは、二近傍までの頂点の関係式を解いており、部品間相対距離と相対角度を保存しているため、全体的に部品間で変形が滑らかに伝播している。

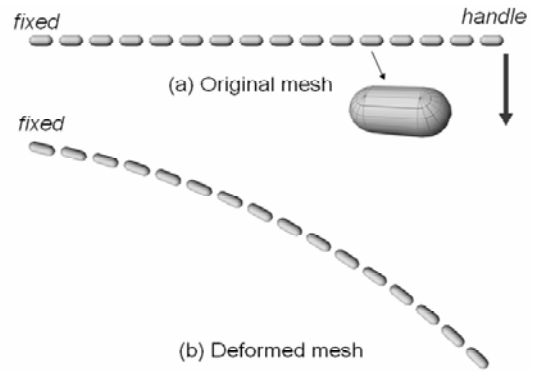


Fig 5. Deformation of disconnected meshes.

式(8)では頂点間の関係を示したが、同様の制約式は、頂点とエッジの間にも設定できる。図6は、連結成分1の頂点 $\mathbf{p}_i^{(1)}$ の最近傍点が連結成分2のエッジ上にある場合を示している。エッジ上の点は、端点の座標の線形和で表せるので、この場合、制約式は内分比  $t$  を用いて以下のように書ける。

$$\begin{cases} \mathbf{p}_i^{(1)} - \{t\mathbf{p}_j^{(2)} + (1-t)\mathbf{p}_k^{(2)}\} - R_i^{(1)}\boldsymbol{\gamma}_{i,jk} = 0 \\ \mathbf{r}_i^{(1)} - \{t\mathbf{r}_j^{(2)} + (1-t)\mathbf{r}_k^{(2)}\} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

面上の点の座標も頂点座標の線形和として、

$$s_i\mathbf{p}_i + t_j\mathbf{p}_j + u_k\mathbf{p}_k = \mathbf{u}_l \quad (s_i + t_j + u_k = 1) \quad (10)$$

と書けるので、最近傍点が他方の連結成分の面上にある場合でも、同様にして、線形制約を設定できる。

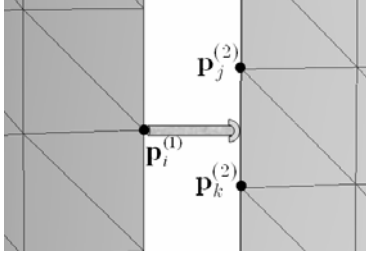


Fig 6. Constraint between a vertex and an edge.

**3・2 非多様体の制約** 非多様体が存在すると、頂点近傍の位相が平面と同相ではなくなるため、平均曲率法線ベクトルが定義できない。そこで、頂点周りが平面と同相でない場合、半平面と同相な面集合に分割する。図7に示すように、分割されたそれぞれの面を fan と呼び、fan ごとに制約式を決める。ここで、頂点  $p_0$  の周りの  $m$  番目の fan に関する制約式として、以下の式を考える。

$$L_m(p_0) = \frac{1}{4A_m(p_0)} \left\{ \sum_{i=2}^{n-1} (\cot \alpha_i + \cot \beta_i)(p_i - p_0) + \cot \alpha_n(p_n - p_0) + \cot \beta_1(p_1 - p_0) \right\} \quad (11)$$

記号は図8に示す通りである。また、 $A_m(p_0)$  は、 $m$  番目の fan に関する頂点  $p_0$  のボロノイ面積である。

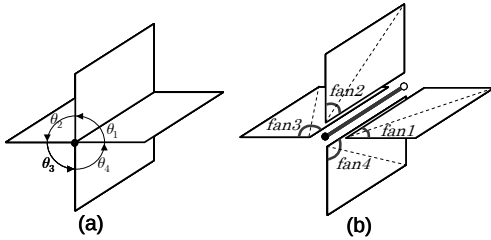


Fig 7. Non-manifold edges.

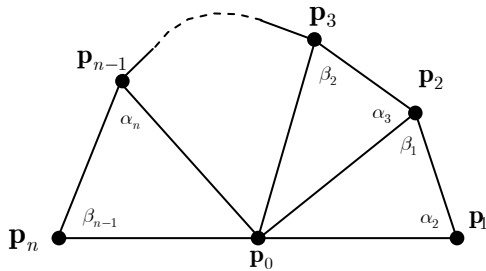


Fig 8. A fan around vertex  $p_0$ .

図9の例では、頂点周りに4個の fan が隣接しており、それぞれに関して、式(11)を用いて、以下の制約式を定める。

$$\begin{cases} L_m(r_i) = 0 \\ L_m(p_i) = R_i \delta_{i,m} \end{cases} \quad (m = 1, 2, 3, 4) \quad (12)$$

ここで、 $\delta_{i,m}$  は各 fan に関する初期値である。式(12)では、4個の fan が回転行列  $R_i$  を共有するため、各 fan の回転量は等しくなり、図9に示すように、変形後の面間角度  $\{\theta_i\}$  は保存する。

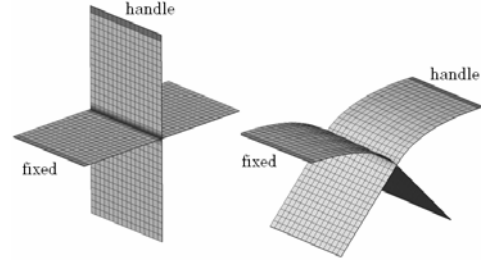


Fig 9. Deformation of non-manifold model

#### 4. 実験結果

本手法を実際に自動車設計で使用されている非連結かつシェル構造の有限要素モデルに適用した。本実験では、次のことを確認する。

- (1) 直感的かつインタラクティブにモデル変形できること。
- (2) 寸法や形状特徴などに関する設計制約を満たすこと。
- (3) 複数の部品から構成されるアセンブリモデルが扱えること。また、部品間の間隔や接続関係などの設計要件を満たすこと。

なお、メッシュ変形システムは、PC上にメッシュモデルをハーフエッジ構造で表現し、C++を用いて実装した。

図10のアセンブリモデルは、二つの非連結成分を持ち、面5234個、頂点2758個から構成される。それぞれをPartAとPartBで示す。また、両部品には非多様体エッジが含まれており、部品の間にはギャップが存在する。固定領域、ハンドル領域、仮想リンク箇所は図10(b)の通りである。図10(c)は、解析の入力メッシュのための変形としては現実的ではないが、接合部も追従して曲がることを示すために例として加えている。このとき、非多様体のリブは面間角度が保存するように変形する。図10(d)は、PartBの左側を仮想リンクで拘束し、PartAのみを引き伸ばしたものである。ユーザの意図に応じて制約を設定することで、部品間の整合性を保つ変形が容易に行える。

図11(a)は、衝撃吸収を評価するために作成された衝突解析用のアセンブリモデルである。図11(b)のComp-Aは、4個のシェル部品からなり、面5092個、頂点2807個から構成されている。図11(c)のComp-Bは、

10個のシェル部品からなり、面18 176個、頂点9 749個から構成されている。

図12は、サブアセンブリモデル **Comp-A** の変形を示しているが、この変形は次の三つの設計上の要求を考慮している。

- (1) 車体の両サイドの結合部分の位置と形状を保つ。
- (2) お互いの部品間の相対距離を保つ。
- (3) 変形後も特徴形状は保持する。

これらの要求は図12(a)に示す制約として指定できる。穴の形状を円弧のまま保持し、円で囲まれた穴の部分には、最近傍頂点を計算して非連結メッシュ間の仮想リンクを設定した。上部のエッジをハンドル領域として移動させた変形結果を図12(b)に示す。この例題では、制約を保持するメッシュ変形をインタラクティブな速度で計算することができている。

図13は、サブアセンブリモデル **Comp-B** の変形を示して

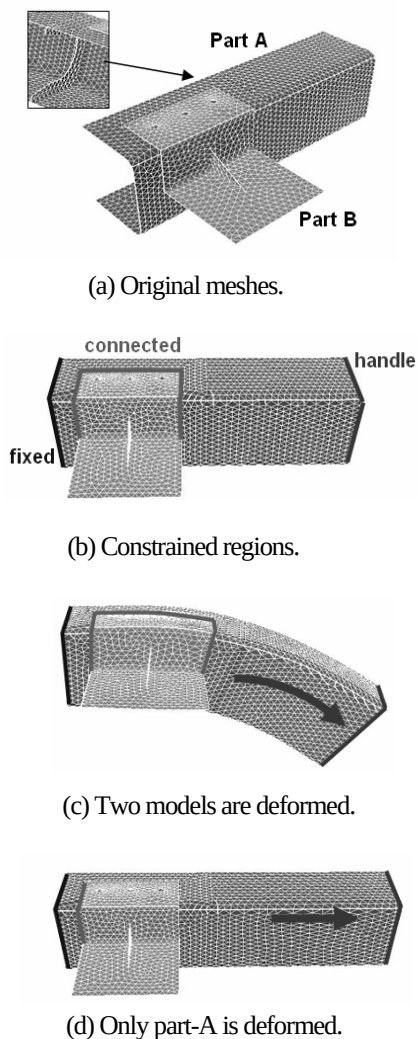


Fig 10. Deformation of an assembly model with non-manifold edges.

いる。この変形では、次の二つの設計上の要求を考慮している。

- (1) 二つの衝突吸収部品の長さを変更するが、サブアセンブリ全体の長さは変更しない。
- (2) 長さが変化した時、すべてのモデルの相対位置を出来るだけ保持する。

これらの要求を図13(a)に示す制約として指定した。この変形では、部品間の接合領域をユーザが指定した上で、最近傍点を計算して仮想リンクを設定した。この条件下での変形結果を図13(b)に示す。この場合も、元の形状を出来る限り保存したまま、インタラクティブな速度でメッシュ編集することができている。

なお、図2, 11-13のメッシュモデルは、三菱自動車工業㈱の提供による。図1, 10のメッシュモデルは、Altair/HyperMesh に付属のサンプルモデルを用いた。

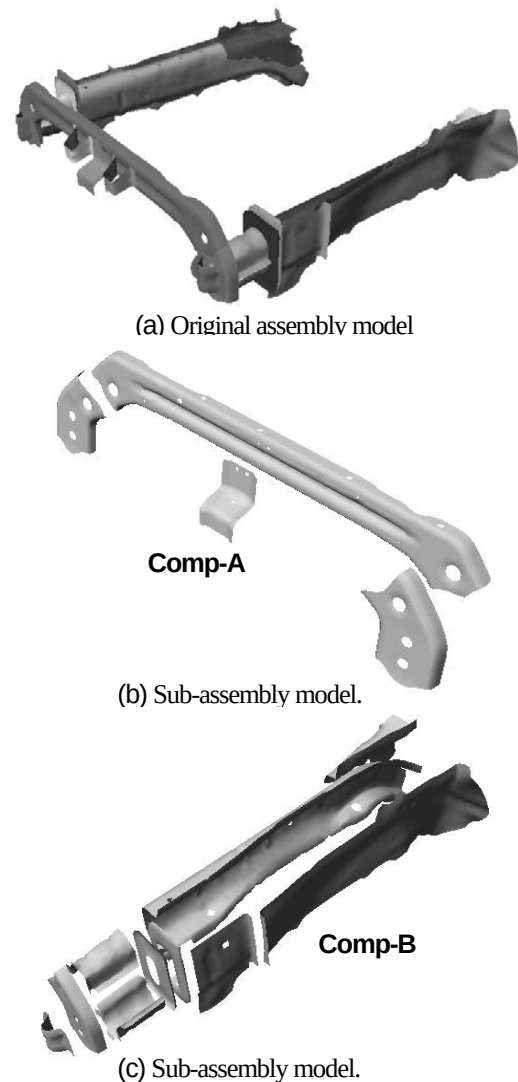


Fig 11. Assembly models for the evaluation of collision absorption.

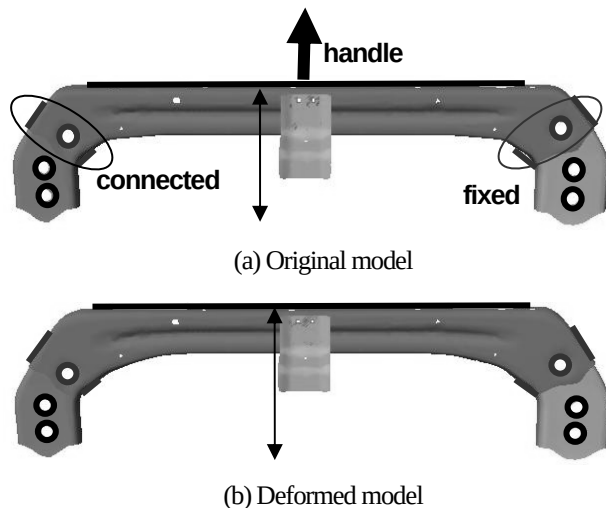


Fig 12. Deformation of Comp-A.

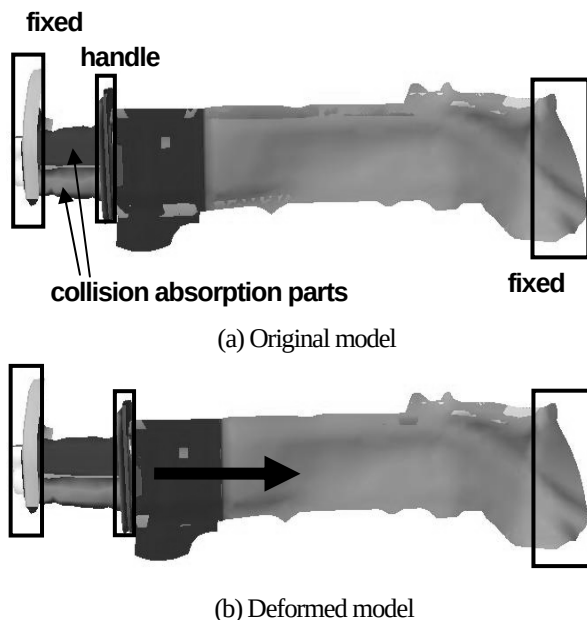


Fig13. Deformation of Comp-B.

## 5. 結 言

本論文では、非連結成分を含むアセンブリのメッシュモデルを整合的に変形する手法を提案した。本方法では、異なる部品に属する頂点間に線形制約を導入することで変形を伝播させる。また、解析用メッシュでしばしば用いられている非多様体モデルに対応する方法も示した。本手法では、すべての制約が線形であるため、前処理としてコレスキー分解をしておくことで、インタラクティブな計算速度で変形が行える。また、本手法を現

実の解析用のモデルに対して適用し、設計意図を考慮した変形を行うことで、その有効性を示した。

今後は、ソリッド要素や様々な要素が混在したモデルへの適用と、大規模なモデルでもインタラクティブに変形できるようにGPUの利用を検討している。さらに、メッシュ編集によるメッシュ品質の振る舞い及び解析結果への影響を調査したい。また、本手法を商用のCADやCAEツールへ実装することも検討していきたい。

## 文 献

- (1) Sederberg, T. W. and Parry, S. R, Free-Form Deformation of Solid Geometric Models, *SIGGRAPH 1986*, (1986), pp. 151-160.
- (2) Masuda, H., Yoshioka, Y. and Furukawa, Y., Preserving Form-Features in Interactive Mesh Deformation, *Computer-Aided Design*, (2007), Vol. 39, Issue 5, pp. 361-368.
- (3) Sorkine, O., Lipman, Y., Cohen-Or, D., Alexa, M., Rössl, C. and Seidel, H.-P., Laplacian Surface Editing, *Eurographics Symposium on Geometry Processing*, (2004), pp. 175-184.
- (4) Botsch, M. and Kobbelt, L., An Intuitive Framework for Real-Time Freeform Modeling, *ACM Transactions on Graphics*, (2004), Vol. 23, No. 3, pp. 630-634.
- (5) Yu, Y., Zhou, K., Xu, D., Shi, X., Bao, H., Guo, B. and Shum, H.-Y., Mesh Editing with Poisson-Based Gradient Field Manipulation, *ACM Transactions on Graphics*, (2004), Vol. 23, No.3, pp. 644-651.
- (6) Zayer, R., Rössl, C., Karni, Z. and Seidel, H.-P., Harmonic Guidance for Surface Deformation, *Computer Graphics Forum*, (2004), Vol. 24, No. 3, pp. 601-609.
- (7) Masuda, H., Yoshioka, Y. and Furukawa, Y., Interactive Mesh Deformation Using Equality-Constrained Least Squares, *Computers and Graphics*, (2006), Vol. 30, No. 6, pp. 936-946.
- (8) Meyer, M., Desbrun, M., Schröder, P. and Barr, A. H., Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds, *Proceedings of Visualization and Mathematics III*, (2003), pp. 35-57.
- (9) Toledo, S., Chen, D. and Rotkin, V., TAUCS: A Library of Sparse Linear Solvers, (2003), (<http://www.tau.ac.il/~stoledo/taucs/>).