

選択的非一様細分割：SNUS*

三浦 憲二郎 **, 増田 宏 †

** 静岡大学工学部機械工学科, † 東京大学人工物工学研究センター

1 はじめに

細分割曲面は、そのスケーラビリティや計算の安定性、コード化の容易さ、特に任意位相を持つ複雑な形状が表可能であることから、グラフィカルモデリングやアニメーションの非常に強力な道具であり、すでにいくつかの商用システムに組み込まれている。Doo-Sabin[2] や Catmull-Clark[1] 細分割曲面は一様テンソル積 B-spline 曲面に基づき、細分割曲面の中でも最も多用されている。

細分割曲面は与えられた制御メッシュを繰り返し精緻化 (refinement) して生成される一連のメッシュの極限曲面 (limit surface) として定義される。この精緻化は通常 knot-doubling と呼ばれる技法を用いて、メッシュのすべての面について均一に実行される。この均一な詳細化は極限曲面に十分近似している領域に対しても不要な細分割を実行し、結果として詳細化されたメッシュのポリゴン数が指数関数的に増大してしまう。

この論文では、選択的に knot spacing の中点へ knot を挿入することにより上記の問題を解決する手法を提案する。knot を選択的に挿入することは knot spacing を考慮する必要があり、非一様再帰細分割曲面 (non-uniform recursive subdivision surface: NURSS)[4] の細分割と類似した処理であるため、提案する手法を選択的非一様細分割 (selective non-uniform subdivision: SNUS) と呼ぶ。提案する手法を用いれば本論文で示すように効率の良い適応細分割を容易に実装することができる。

2 曲線への SNUS

2.1 曲線の knot-doubling

周期的な B-spline 細分割曲線の制御ポリゴンは knot-doubling を繰り返し適用して精緻化される [4]。ここで、knot-doubling とは各 knot 間隔 (interval) の中点に新しい knot を挿入する処理であり、同じ曲線を表す制御点の数を 2 倍に増やす。周期的非一様 2 次 B-spline 曲線に対して、制御ポリゴンの各頂点は単一の 2 次曲線セグメントに対応し、制御頂点 P_i に knot 間隔が割り当てられる。この場合、図 1(a) に示すように knot-doubling は次式で与えられる Q_k を生成する:

$$Q_{2i} = \frac{(d_i + 2d_{i+1})P_i + d_i P_{i+1}}{2(d_i + d_{i+1})}, \quad (1)$$

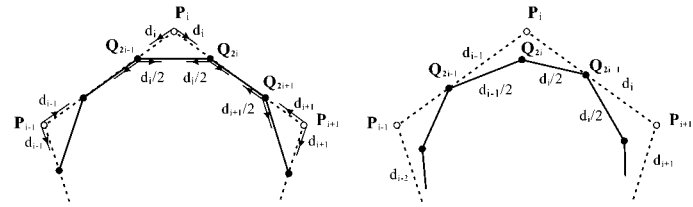
$$Q_{2i+1} = \frac{d_{i+1}P_i + (2d_i + d_{i+1})P_{i+1}}{2(d_i + d_{i+1})}. \quad (2)$$

周期的非一様 3 次 B-spline 曲線に対しては、制御ポリゴンの各稜線が単一の 3 次曲線に対応し頂点ではなく稜線に knot 間隔が割り当てられる。新たな制御点 Q_k は次式より計算され、

$$Q_{2i+1} = \frac{(d_i + 2d_{i+1})P_i + (d_i + 2d_{i-1})P_{i+1}}{2(d_{i-1} + d_i + d_{i+1})} \quad (3)$$

$$Q_{2i} = \frac{d_i Q_{2i-1} + (d_{i-1} + d_i)P_i + d_{i-1} Q_{2i+1}}{2(d_{i-1} + d_i)} \quad (4)$$

*Selective Non-Uniform Subdivision, Kenjiro T. Miura, Hiroshi Masuda, Department of Mechanical Engineering, Shizuoka University, 3-5-1 Johoku, Hamamatsu 432, Japan



(a) Quadratic curve.

(b) Cubic curve.

Fig. 1: Non-uniform B-spline curve.

図 1(b) に示すような点列が得られる。

knot-doubling による非選択的な細分割は、細分割の対象となる knot 間隔が 0, あるいは他の knot 間隔より極端に小さい場合は問題がある。例えば、2 次 B-spline 曲線の knot 間隔の 1 つ d_i が 0 であれば、式 (1) と (2) より、 $Q_{2i-1} = Q_{2i} = P_i$ となり、2 つの連続する制御頂点は一致してしまう。これは隣接する 2 つのセグメントの継ぎ目に knot を挿入した結果であり、制御点の数は増加するが曲線は精緻化されないことを意味する。そこでのさらなる knot-doubling は同じ位置に制御点を堆積させ、極限曲線への収束を遅らせる。他の knot 間隔より極端に小さい knot 間隔でも同様な現象が起こる。

3 次曲線の場合でも、稜線に割り当てられた knot 間隔が 0, あるいは他の knot 間隔より極端に小さい場合に同様な制御点の堆積が避けられない。式 (3) と (4) は d_i が 0 のとき次式のように単純化される:

$$Q_{2i+1} = \frac{d_{i+1}P_i + d_{i-1}P_{i+1}}{(d_{i-1} + d_{i+1})} \quad (5)$$

$$Q_{2i} = \frac{P_i + Q_{2i+1}}{2} \quad (6)$$

上式は Q_{2i-1} と Q_{2i} , Q_{2i+1} が同一の稜線上にあり、 Q_{2i} が精緻化になんら寄与しないことを示している。

2.2 選択的な knot の挿入

前述の問題の単純な解決法は、隣接する 2 つのセグメントの継ぎ目や小さな knot 間隔に選択的に knot を挿入しないことである。2 次曲線に対しては、knot 挿入を止めるには ‘角の切り落とし’ をしなければ良いので、細分割のための適切な評価基準が与えられれば非効率な knot 挿入を抑制することは容易である。3 次曲線の場合は 2 次曲線に比し複雑ではあるが以下に説明するようにやはり容易に実行することができる。

図 2 に示すように、非一様 3 次 B-spline 曲線への初期 knot 間隔 d_i の中点への knot 挿入は次式により算出される (cf. [3]):

$$R_{i-1} = \frac{d_{i+1}P_{i-1} + \{2(d_{i-1} + d_i) + d_{i+1}\}P_i}{2(d_{i-2} + d_{i-1} + d_i)} \quad (7)$$

$$R_i = \frac{(d_i + 2d_{i+1})P_i + (d_i + 2d_{i-1})P_{i+1}}{2(d_{i-1} + d_i + d_{i+1})} \quad (8)$$

$$R_{i+1} = \frac{\{d_i + 2(d_{i+1} + d_{i+2})\}P_{i+1} + d_i P_{i+2}}{2(d_i + d_{i+1} + d_{i+2})} \quad (9)$$

隣接する次の初期 knot 間隔 d_{i+1} の中点への knot 挿入は新しい制御点 S_i と S_{i+1} , S_{i+2} を生成する. 簡単な式の変形によりそれらの制御点はそれぞれ式 (4) と (3), (9) と同様に与えられる¹. さらなる knot の挿入もこれらの式を適切に応用することで実行される. 図 2 において緑の線分で示したように, 細分割していない knot 間隔 d_{i-1} から反対方向の, 前の knot 間隔 d_{i-2} へ knot を挿入したとしても R_{i-1} の位置は変化しない.

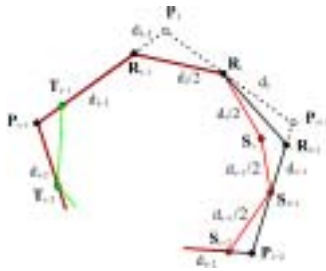


Fig. 2: Selective knot insertion.

3 曲面への SNUS

非一様 B-spline 曲線への選択的細分割の議論に基づき, Doo-Sabin と Catmull-Clark 細分割曲面を選択的に細分割する手法を提案する. ここで取り扱う細分割曲面は 3.3 節の例を除いて一様な (uniform) タイプであるが, SNUS では knot-spacing を考慮し, NURSS に対する細分割のようにそれらを考慮しながら精緻化する. ここでは紙面の関係から, 結果として得られる適応的細分割例を示すにとどめる.

3.1 Doo-Sabin への選択的細分割

図 3 は Doo-Sabin の選択的再分割例を示す. 現在の頂点位置と knot-spacing のみを用いて選択的細分割を可能とする頂点分割操作を新たに導入することにより, 指定した面数を持つモデルを生成できる.



Fig. 3: SNUS into specified numbers of faces.

3.2 Catmull-Clark への選択的細分割

Catmull-Clark 曲面への SNUS の実装は以下の特徴を持つ. 1) 規則的 (regular) なメッシュの面は等パラメータ線に沿って 2 つ, あるいは 4 つの四辺形に細分割される. 2) 特異 (extraordinary) 点を持つ面は必要であれば特異点の周りの面と同時に 4 つの面に細分割される. 3) すべての頂点の極限点 (limit point) は初期メッシュから得られる極限曲面上に存在することを保障する. 図 4 に細分割例を示す.

¹式 (9) はセグメント $P_{i+1}P_{i+2}$ ではなく P_iP_{i+1} に適用する.

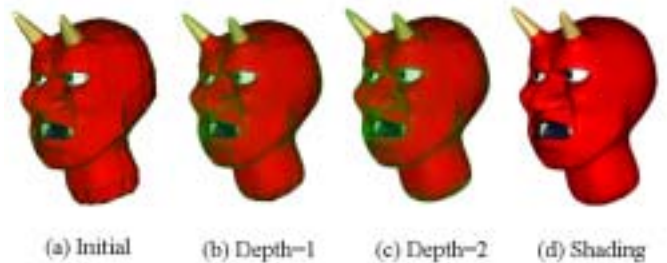


Fig. 4: SNUS for a Catmull-Clark surface.

3.3 パラメータ空間での SNUS

図 5 は非一様 Catmull-Clark 細分割曲面にパラメータ空間で knot 挿入を選択的に行った例である. Doo-Sabin を degree elevation によって Catmull-Clark 細分割曲面に変換すると, knot spacing の値が 0 となる稜線が生成される. 図 5 では制御頂点が堆積する様子を明らかに示すため, 0 であるべき knot-spacing に小さな値 (0.1) を割り当て, 均一に細分割した場合 (a) と選択的な場合 (b) を比較している. 各ファイル (obj) の大きさは (a)6.82, (b)2.11MByte であり SNUS によりファイルサイズが約 1/3 に減少している.



(a) Uniform (dep.=3). (b) SNUS (dep.=3).

Fig. 5: SNUS in parameter space.

4 結言

この論文では, SNUS と呼ぶ選択的に knot spacing の中点に knot を挿入する手法を提案し, Doo-Sabin や Catmull-Clark 細分割曲面を局所的に精緻化することを可能にした. 手法の有効性を検証するために, それらの細分割曲面を SNUS を利用して効率良く適応的に細分割する方法を開発した.

参考文献

- [1] E. Catmull, and J. Clark, "Recursively Generated B-spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes," *Computer-aided Design*, Vol.10, No.6, pp.350-355, 1978.
- [2] D. Doo, and M. Sabin, "Behaviour of Recursive Division Faces Near Extraordinary Points," *Computer-aided Design*, Vol.10, No.6, pp.356-360, 1978.
- [3] L. Piegl, and W. Tiller, *The NURBS Book*, 2nd Ed. Springer-Verlag, 1997.
- [4] T.W. Sederberg, J. Zheng, D. Sewell and M. Sabin, "Non-Uniform Recursive Subdivision Surfaces," *Computer Graphics (Proc. of SIGGRAPH'98)* Vol. 32, pp.387-394, July, 1998.