

形状特徴を保存するインタラクティブなメッシュ変形操作

増田 宏[†] 吉岡 康博^{†,††} 古川 慈之^{†††}

工業製品の意匠曲面は、自由曲面と形状特徴の組合せによって定義されることが多い。こうした曲面を含む形状をインタラクティブに変形する場合には、形状特徴の形状や寸法の制約を厳密に満たし、自由曲面部については元の曲率をできるだけ保存することが求められる。本論文ではこのような問題に対応できる、厳密制約と緩い制約を同時に扱うメッシュ変形フレームワークを提案する。本手法では、厳密制約と緩い制約を満たす頂点座標を算出する問題を、ラグランジュ未定定数によって疎な対称行列の解法問題に帰着させる。さらに、頂点間の相対位置を保存する制約を導入することで、形状特徴部の寸法や形状を保持したまま変形することを可能にする。また、ハンドルの回転に追従した変形を実現するために、単位四元数の対数を補間することで、平均曲率法線と相対位置ベクトルを回転する方法を示す。本手法を実装して評価した結果、本手法は、少ない前処理時間で、ユーザのマウス操作に追従したインタラクティブな変形ができることを確認した。

Feature-Preserving Interactive Mesh Deformation

HIROSHI MASUDA,[†] YASUHIRO YOSHIOKA^{†,††}
and YOSHIYUKI FURUKAWA^{†††}

1. はじめに

意匠デザインや設計初期の検討においては、曲面を試行錯誤的に作成することが多いため、インタラクティブかつ直観的に曲面編集を行うことが強く求められる。しかし、これまで製品設計において主として利用されてきたパラメトリック曲面では、編集に多くの手間がかかることが多く、直観的かつインタラクティブに変形することは難しかった。

最近、曲面をメッシュで表現し、メッシュの特徴を維持した編集手法が盛んに研究されている^{1)~3)}。これらの手法は、メッシュの各頂点で、平均曲率法線 (mean curvature normal) に相当する量を離散ラプラシアンを用いて算出し、変形の前後でそれらが保存するように頂点座標を決める。典型的なメッシュ変形においては、まず初めにユーザが固定する領域と、操作するための

ハンドルとなる領域を選択する。ハンドルとは、ユーザが曲面を変形するために操作する部分形状のことである。ユーザが、スクリーン上でマウスやスライダを用いてハンドルを移動させると、メッシュモデルの全体形状が、ハンドルの移動に追従してリアルタイムに変形する。

こうした手法は CG アニメーションの作成支援には有効と考えられるが、工業製品の意匠デザインの支援に適用するためには、解決すべき問題が存在する。

意匠曲面は、自由曲面と形状特徴の組合せによって定義されることが多い。形状特徴には、穴やリブなど幾何曲面の種類と寸法によって規定される形状や、意匠的な特徴稜線などが含まれる。これらは寸法や形状ができる限り厳密に満たされることが要求される。一方、自由曲面部にはこうした明示的な指定はないことが多いが、設計意図は曲率分布と関連が深いとされている。

したがって、このような意匠デザインへの応用では形状特徴の制約は厳密に満たし、自由曲面部については元の曲率をできるだけ保存することが求められる。

また、平均曲率法線を単に保存しただけでは、ハンドルの回転に追従した変形がうまく行えないことが知ら

[†] 東京大学

The University of Tokyo

^{††} 現在、任天堂株式会社

Nintendo Cooperation from Apl.2006

^{†††} 産業技術総合研究所

National Institute of Advanced Industrial Science and Technology

れている^{1),3)}。ベクトルの回転は、XYZ 座標系では三角関数を用いて記述される非線形操作であるため、インタラクティブに操作するためには特別な工夫が必要となる。

本論文ではこのような問題を解決するために、厳密制約と緩い制約を扱うメッシュ変形フレームワークを提案する。本論文の主たる貢献は以下に示す通りである。

- 厳密制約と緩い制約を同時に扱うフレームワークを提案したこと。
- 形状特徴を維持しながら変形する方法を示したこと。
- 単位四元数の対数をエネルギー最小曲面によって補間することで、平均曲率法線をインタラクティブに回転する方法を示したこと。
- 過剰な厳密制約の解消方法を示したこと。

2. メッシュ変形操作

2.1 厳密制約と緩い制約

メッシュモデルの頂点 i に関して、エッジで連結した近傍頂点の集合を $N(i)$ 、座標を \mathbf{p}_i 、平均曲率を κ_i 、法線ベクトルを \mathbf{n}_i 、ポロノイ面積を A_i と置く。ポロノイ面積とは、最近傍頂点が i となるメッシュ上の領域の面積のことである。このとき、離散平均曲率法線 $\kappa_i \mathbf{n}_i$ は以下の式で求められる⁶⁾。

$$\kappa_i \mathbf{n}_i = \frac{1}{4A_i} \sum_{j \in N(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \quad (1)$$

α_{ij} と β_{ij} は、図 1 に示すように、エッジ (i, j) を共有する二つの三角形の向かい合う角度である。

また、頂点 i の位置制約は定数ベクトル \mathbf{u}_i を用いて

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{u}_i \quad (2)$$

のように書ける。稜線上および面上の任意の点に関する位置制約についても次のように記述できる。

$$\begin{cases} t\mathbf{p}_i + (1-t)\mathbf{p}_j = \mathbf{u}_{ij} \\ s\mathbf{p}_i + t\mathbf{p}_j + (1-s-t)\mathbf{p}_k = \mathbf{u}_{ijk} \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{u}_{ij}, \mathbf{u}_{ijk}$ は定数となるベクトル、 t, s は $0 < t < 1, 0 < s < 1, 0 < s+t < 1$ を満たす定数である。

本論文では、一般にメッシュ頂点の集合 $\mathbb{P} = \{\mathbf{p}_i\}$ に関する一次式を $\mathbf{f}_j(\mathbb{P})$ で表し、平均曲率以外の制約を $\mathbf{f}_j(\mathbb{P}) = \mathbf{u}_j$ のように書くことにする。また、頂点の添字集合を $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ 、位置制約の添字集合を $\Lambda_p = \{1, 2, \dots, m\}$ とおく。このとき、変形前の平均曲率法線を δ_i とすると、平均曲率法線と頂点位置に関する制約式は以下の連立一次方程式となる。

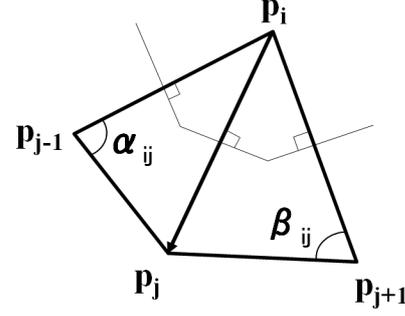


図 1 角度 α_{ij} と β_{ij} 。

$$\begin{cases} \frac{1}{4A_i} \sum_{j \in N(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = \delta_i & (i \in \Lambda) \\ \mathbf{f}_j(\mathbb{P}) = \mathbf{u}_j & (j \in \Lambda_p) \end{cases} \quad (4)$$

式 4 では、制約の個数が変数の個数より多いため、厳密解は存在しない。従来手法^{1)~3),5)} では、すべて一律に最小二乗法で解いていたが、我々は緩い制約と厳密制約とに区別して扱う。典型的には、ユーザが陽に指定することが少ない平均曲率法線を緩い制約、寸法などに基づき指定される位置制約を厳密制約と考えることができる。

ここで、緩い制約を

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

厳密制約を

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

として行列形式で表現する。未知数は、

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$$

とする。 $\{y_i\}, \{z_i\}$ も同じ線形システムで求まるので、ここでは $\{x_i\}$ だけを示す。

$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ を満たし $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ を最小にする \mathbf{x} を求める問題は、Lagrange 未定数法により、次の線形システムを解く問題に帰着する。 λ は未定数である。

$$\mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}} \quad (5)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{A} & \mathbf{C}^t \\ \mathbf{C} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{b} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

行列 \mathbf{M} は対称行列であるが正定値ではない。この線形システムを解くためには、非正定値対称行列のソルバ⁸⁾ を用いる方法と、行列を正定値行列に変換して、正定値行列ソルバ⁹⁾ を用いる方法が考えられる。正定値行列に変換するには、式 5 を $\mathbf{M}^2 \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{M} \tilde{\mathbf{b}}$ と書き換えればよい。本研究では、これらを実装し比較を行った結果、SuperLU をソルバとして用いた方が安定かつ高速になるという結果が得られた。

ただし，三角形の大きさが著しく不均一な場合やいびつな三角形が存在する場合は，式 1 の値が非常に大きくなることもあり，その場合には計算が不安定になる．そのため，いくつかの研究^{1),3)}では， \cot やポロノイ面積の重みを使わずに，均一な重み $1/N(i)$ を用いている．しかし，均一な重みは，メッシュが均一に切られていないと変形結果が歪むという問題がある．

計算を安定化させる方法として，ソルバの精度を倍倍精度 (long double) に書き換える方法と，式 1 のポロノイ面積や三角形の角度の値を制限する方法が考えられる．前者の方法も十分現実的であるが，ここでは，後者の方法を用いて，CAD システムから作成されたフィレット部の極度にいびつなメッシュに対応した．本研究で想定する板金パネルでは，自然物と違って微小な凹凸は存在しないので，我々の実験では，値の制限によって歪みが現われたケースは見当たらなかった．

2.2 平均曲率法線の回転

2.2.1 回転を考慮した制約式

式 4 では，平均曲率法線の向き \mathbf{n}_i が固定されるため，ハンドルの回転に追従した回転は起こらない．そのため，なんらかの手段で δ_i を回転することが必要となる．

図 2 は，平均曲率法線を固定した場合の影響を示している．図 2 (a) は，初期状態のメッシュとその法線ベクトル，図 2 (b) は，ハンドルが回転しても，平均曲率法線の向きを元のまま保存した例である．ハンドルの回転に追従させて法線の回転を行わないと，この例に示すように形状が歪むという問題が生じる．図 2 (c) のように，ハンドルの回転に応じて，他の頂点の平均曲率法線 δ_i を適切に回転させることができれば，直観に合った自然な変形結果を得ることができる．

そこで，回転を考慮して，式 4 を以下のように書き換える．

$$\begin{cases} \frac{1}{4A_i} \sum_{j \in N(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = s_i R_i(\delta_i) \\ \mathbf{f}_j(\mathbb{P}) = \mathbf{u}_j \end{cases} \quad (6)$$

R_i はベクトルを回転させる演算子， s_i はスケールである．スケールは，特に指定しない限り $s_i = 1$ とする．

各頂点での平均曲率法線の回転 R_i を算出するために，本研究では，各頂点に単位四元数の対数を割り当て，単位四元数の対数が張る空間におけるエネルギー最小曲面を計算して回転の補間を行う方法を提案する．

2.2.2 単位四元数の対数

四元数 (quaternion) は，実数 (w, x, y, z) を用いて，

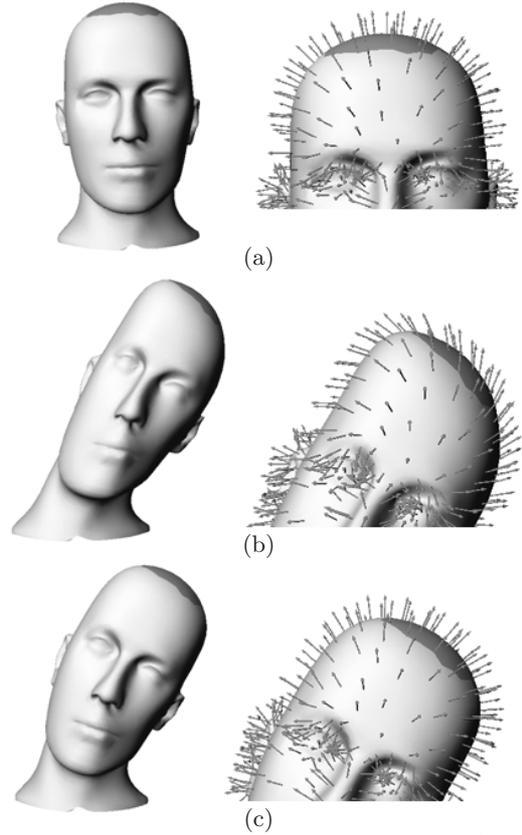


図 2 デフォーメーションにおける \mathbf{n}_i の回転

以下のように書ける．

$$Q = (w, x, y, z) = w + xi + yj + zk \quad (7)$$

ここで， i, j, k は四元数単位である．絶対値が 1 である四元数は単位四元数と呼ばれ，回転軸 $\hat{\mathbf{n}}$ と回転角 θ を用いて以下のように書ける． $\hat{\mathbf{n}}$ は，純四元数である．

$$\hat{Q} = \exp\left(\frac{\theta}{2} \hat{\mathbf{n}}\right) = \cos \frac{\theta}{2} + \hat{\mathbf{n}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (8)$$

このとき，単位四元数の対数 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ は，以下のように定義される．

$$\mathbf{q} = \ln \hat{Q} = \frac{\theta}{2} \hat{\mathbf{n}}. \quad (9)$$

本研究では，式 9 を用いて，各頂点での平均曲率法線の回転を，回転軸 $\hat{\mathbf{n}}_i$ と回転角 θ_i の積：

$$\mathbf{q}_i = \frac{1}{2} \theta_i \hat{\mathbf{n}}_i \quad (10)$$

によって表すことにする．

2.2.3 回転の補間

回転は，座標の計算と同様に，以下の連立一次方程式で計算する．

$$\begin{cases} \frac{1}{4A_i} \sum_{j \in N(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) = 0 & (i \in \Lambda) \\ \mathbf{q}_j = 0 & (j \in \Lambda_f) \\ \mathbf{q}_k = \mathbf{r}_k & (k \in \Lambda_h) \end{cases} \quad (11)$$

ただし， Λ_f は固定領域の頂点の添字集合， Λ_h はハンドル領域の頂点の添字集合である．この計算は，単位四元数の対数が張る空間 \mathbb{R}^3 において， $\{\mathbf{q}_j\}$ と $\{\mathbf{q}_k\}$ を通りエネルギー最小となる曲面を求める問題とみなすことができる¹³⁾．

図 2(c) は，算出した回転角に基づいて，各頂点で元の平均曲率法線 δ_i を回転し，頂点座標を計算した例である．

図 3 は，回転量を可視化したものである．この図は，回転軸の 1 成分を 0 とおいて，単位四元数の張る空間 S^3 を S^2 に縮退させて表示したものである¹⁴⁾．図 (a) は，単一のハンドルが剛体として回転する場合を示している．回転は，固定点とハンドル頂点の回転の間を球面線形補間される．(b) は，2 個のハンドル，(c) は，3 個のハンドルを指定した場合で，ハンドルと固定点から構成される領域の内部で，エネルギー最小となるように各頂点の回転が補間される．

なお，本研究の位置付けについてまとめておく．Shoemaker¹⁰⁾ は，回転量を単位四元数を用いて表すことで，二つの回転を球面線形補間できる手法を示した．また，Johnson¹¹⁾ は，3 個以上の回転の球面線形補間が，単位四元数の対数の線形和を用いて計算できることを示した．単位四元数の空間は S^3 であるが，単位四元数の対数の空間は \mathbb{R}^3 であることから，線形和による補間が可能となる．道川¹²⁾ はこの方法をモーフィングに応用している．ただし，これらの研究では曲面上のベクトル分布の補間方法には言及していない．メッシュ上の回転量の補間に単位四元数を用いた研究として，Zayer ら⁵⁾ の調和関数による方法がある．この方法では，ハンドルが単一の剛体として回転する場合に限定しているが，我々と同様に，離散ラプラシアン (Laplace-Beltrami operator) を用いており，不均一なメッシュでも良好な補間が可能である．しかし，Zayer らの方法では，単位四元数の四成分を線形補間しているために球面線形補間にはならないが，我々の方法は，同じ条件下では球面線形補間になる．また，我々の方法ではハンドルが単一の剛体という制約は必要ない．

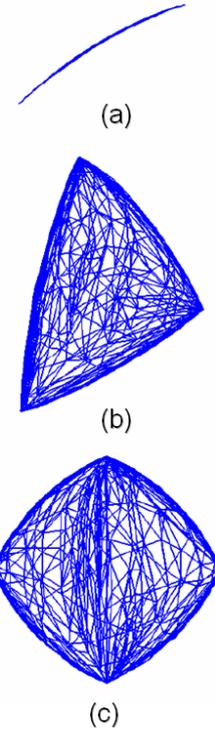


図 3 単位四元数の可視化

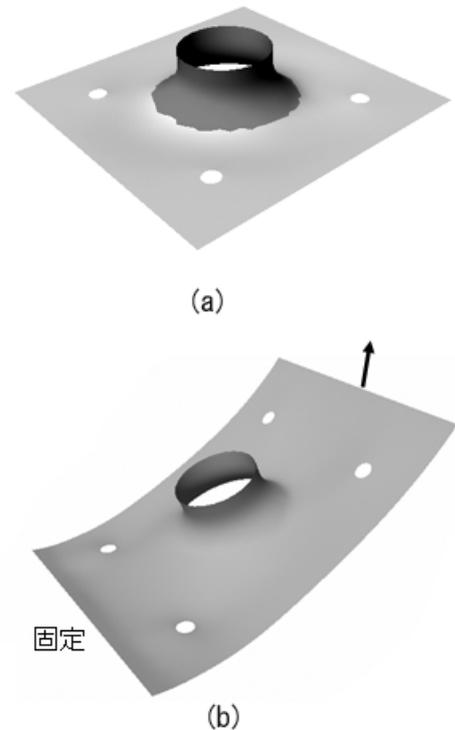


図 4 形状特徴を保持した変形

3. 形状特徴の保存

3.1 形状特徴制約

形状特徴部は、メッシュの変形に伴って、その形状を保ちながら平行/回転移動を行う。ここでは、形状特徴は、メッシュ頂点の部分集合として表現される。

一つの形状特徴 f を構成する頂点の添字集合を Λ_f 、メッシュのエッジ集合を E とするとき、形状特徴を保持するための制約は以下のように書ける。

$$\begin{cases} \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j = 0 & (i \in \Lambda_f, j \in \Lambda_f, (i, j) \in E) \\ \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j = s_f R_i (\mathbf{p}_i^{(0)} - \mathbf{p}_j^{(0)}) & (i \in \Lambda_f, j \in \Lambda_f, (i, j) \in E) \end{cases} \quad (12)$$

ここで、 $\mathbf{p}_i^{(0)}$ は変形前の頂点 i の座標、 s_f はスケール、 R_i は回転軸 $\hat{\mathbf{q}}_i$ 周りに角度 $|\mathbf{q}_i|$ 回転させる演算子である。これらは、指定された領域における頂点座標の相対位置を固定し、回転量を同一にするための制約である。

これらの制約を式 11 と式 6 に追加することによって形状特徴を保ったままに変形が行える。図 4 では、図 (a) で濃く示した部分と小さい穴の境界に対して計 5 個の形状特徴制約を与えている。この制約によって、図 (b) のように、変形中も突起部分と円弧穴の部分は元の形状が保持されている。

形状特徴領域の指定は、画面上において、矩形ツールもしくはフリーハンドでメッシュ上に閉領域を描くことを行うことができる。閉領域が指定されると、その内部の頂点間 (図 4(a) の突起部分)、もしくは閉領域に含まれる境界エッジ上の頂点 (図 4(a) の小さい穴の境界) に対して形状特徴制約が与えられる。

3.2 過剰制約の処理

厳密制約においては、過剰制約が存在すると式 5 にランク落ちが生じ、解の算出に失敗する。そのような場合でも、厳密制約の行列 C^t の QR 分解を用いて過剰制約の検出ができる。QR 分解とは、行列を直交行列 Q と上三角行列 R の積に分解する操作である。QR 分解は、疎行列の場合には、オーダー n の計算量なので、非常に高速に計算が行える。

C^t の各列はそれぞれ 1 つの厳密制約の式である。QR 分解では、一列ごとに順次ハウスホルダー変換を施していく。ハウスホルダー変換の過程で C^t の j 列目が過剰制約であった場合、対角成分以下の成分が全て 0 となる。これを監視することで過剰制約が検出できる。全ての過剰制約を除去した後にコレスキー分解を施して解の算出を行い、除去した制約が算出された解と整合的であれば冗長制約、そうでなければ矛盾制約である。

この方法では、後から指定された制約のみが冗長または矛盾であると判断される。したがって、どの制約と矛盾するかを判定したい場合には、検出された過剰制約を第一列に移動し、再度 QR 分解を施すことが必要である。

4. 例題

図 5 に意匠曲面の変形例を示す。上段は、形状特徴の制約を与えない場合で、ライトやプレート部分が設計意図と異なる形状に変形している。中段は、穴の部分の形状を保存するように制約を与えた例である。下段は、形状特徴部のスケールを操作した例である。この例題では、頂点数が 13974 個、緩い制約が 14040 個、厳密制約は 4048 個である。前処理であるコレスキー分解に要した時間は 3.27 秒で、その後の変形はマウスに追従して行えた。また、形状特徴のスケールはスライダーによって行い、この操作もリアルタイムに行えた。なお、計算機はノート PC (Pentium-M 1.50GHz, 1GB RAM) を使用した。

図 6 にドアパネルの変形例を示す。この例では、デザイン上重要とされるキャラクターラインと呼ばれるエッジが存在し、そのラインが保存されることが要求される。図 (a) では、形状特徴制約を指定せずに変形したために、キャラクターラインがうねっている。図 (b) ではキャラクターラインの形状は保存されたまま変形が行われている。

5. 結論

本研究では、厳密制約と緩い制約を同時に扱い、インタラクティブに形状変形する手法を示した。また、形状特徴を保存する方法についても示した。さらに、回転を単位四元数の対数を用いて表現し、エネルギー最小曲面を用いて補間する方法を示した。これらの計算は、疎な対称行列を解く問題に帰着され、行列の因子分解を行うソルバを適用することで高速な計算が行える。また、現実の設計に用いられているデータを用いて手法の評価を行った。

これらの手法は、意匠設計のニーズに適合するものである。今後、市販システムに組み込む等により、現実問題に適用していくことを考えている。

謝辞

本研究の例題で用いた 3D モデルは、三菱自動車工業 (株) より提供いただいた。ここに感謝の意を表す。

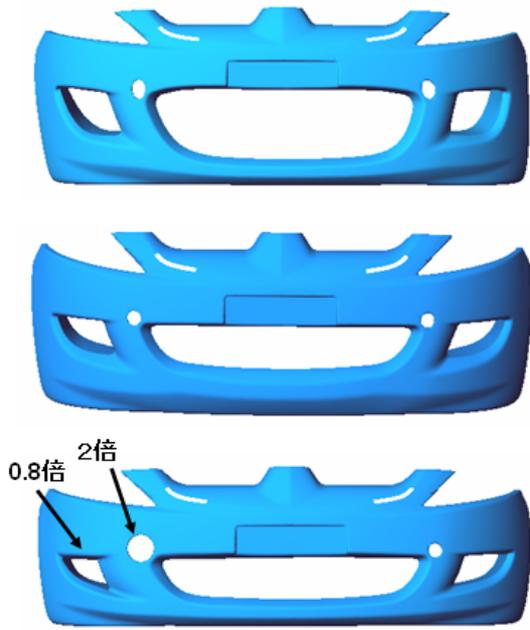


図5 意匠曲面の変形 (バンパーグリル) : 上段 : 形状特徴制約なし . 中段 : 形状特徴制約あり . 下段 : 形状特徴のスケールリング.

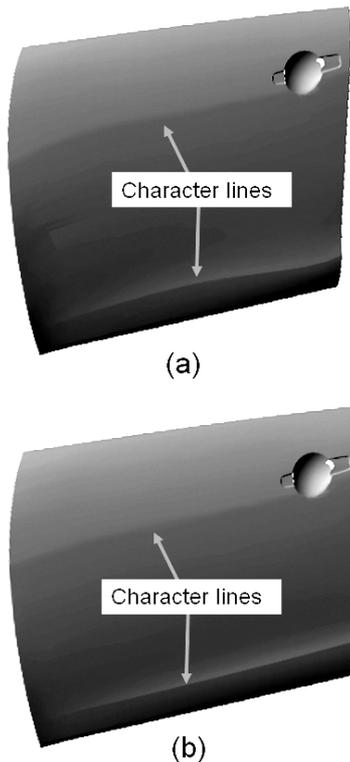


図6 意匠曲面の変形 (ドアパネル) : (a) 形状特徴を指定せずに変形. (b) 形状特徴をキャラクターラインに沿って指定.

参考文献

- 1) SORKINE, O., LIPMAN, Y., COHEN-OR, D., ALEXA, M., RÖSSL, C., AND SEIDEL, H.-P. Laplacian surface editing. *Proc. of Symposium on Geometry Processing*, pp.175–184 (2004).
- 2) BOTSCH, M., AND KOBELT, L. An intuitive framework for real-time freeform modeling. *ACM Trans. Graph.* 23, 3, 630–634 (2004).
- 3) LIPMAN, Y., SORKINE, O., LEVIN, D., AND COHEN-OR, D. Linear rotation-invariant coordinates for meshes. *ACM Trans. Graph.* 24, 3, 479–487 (2005).
- 4) BOTSCH, M., BOMMES, D., AND KOBELT, L. Efficient linear system solvers for mesh processing. *IMA Conference on the Mathematics of Surfaces*, 62–83 (2005).
- 5) ZAYER, R., RÖSSL, C., KARNI, Z., AND SEIDEL, H.-P.: Harmonic guidance for surface deformation. *Comput. Graph. Forum* 24, 3, 601–609 (2005).
- 6) MEYER, M., DESBRUN, M., SCHRÖDER, P., AND BARR, A.H.: Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. *Visualization and Mathematics III*, 35–57 (2003).
- 7) SORKINE, O.: “Laplacian mesh processing,” Proceedings of Eurographics 2005, pp.53–70 (2005).
- 8) James Demmel, J., Gilbert, J., and Xiaoye Li, X. : “SuperLU User’s Guide”, (1995).
- 9) Toledo, S., Chen, D. , and Rotkin, V. : “Taucs: A library of sparse linear solvers,” <http://www.tau.ac.il/stoledo/taucs/> (2003).
- 10) Shoemake, K. : “Animating rotation with quaternion curves,” Proceedings of SIGGRAPH 1985, pp. 245–254 (1985).
- 11) Johnson, M. P. : “Exploiting quaternions to support expressive interactive character motion,” PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, School of Architecture and Planning, Program in Media Arts and Sciences (2003).
- 12) 道川隆士 : 多重解像度表現に基づく高品質な形状補間手法, 東京大学大学院工学系研究科 博士論文 (1996).
- 13) Pinkall, U. and Polthier, K. : “Computing discrete minimal surfaces and their conjugates,” *Experimental Mathematics* 2(1), pp. 15–36 (1993).
- 14) Erik, B.D., Martin, K. , and Martin, L. : “Quaternions, Interpolation and Animation,” Technical Report:DIKU-TR-98/5, Department of Computer Science, University of Copenhagen, 1998.